3.6.9 Thaletova kružnice

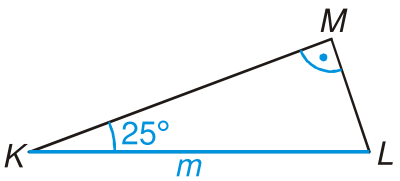
Předpoklady: 030308

Př. 1: Mezi množiny bodů dané vlastnosti patří také Thaletova kružnice. Jaká vlastnost množiny bodů, kterou tvoří Thaletova kružnice sestrojená nad průměrem *AB*, ze které jsou vyloučeny body *A*, *B*?

Thaletovu kružnici (s vyloučením bodů *A*, *B*) tvoří body *X*, pro které je úhel AXB pravý.

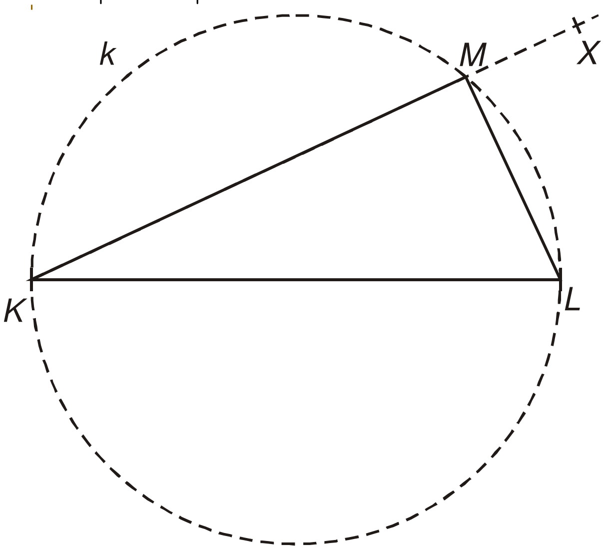
Často se také říká, že Thaletova kružnice je množina všech bodů, ze kterých je úsečka *AB* vidět pod pravým úhlem.

Př. 2: Je dána úsečka *KL*, $|KL| = 7\text{ cm}$. Najdi všechny body *M* tak, aby trojúhelník *KLM* byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu *M* a platilo $|\sphericalangle MKL| = 25°$.



Vycházíme z narýsované úsečky *KL* $\Rightarrow$ hledáme bod *M*, tak aby platilo:

- $|\sphericalangle LKM| = 25° \Rightarrow$ bod *M* leží na polopřímce, která svírá s úsečkou *KL* úhel $25°$,
- $|\sphericalangle KML| = 90° \Rightarrow$ bod *M* leží na Thaletově kružnici nad průměrem *KL*.



1. úsečka *KL*, $|KL| = 7\text{ cm}$

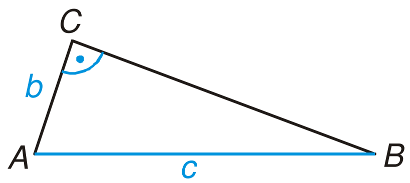
2. polopřímka *KX*, $|\sphericalangle LKX| = 25°$

3. kružnice $k\left(S_{KL}; |S_{KL}K|\right)$

4. bod *M*, průsečík polopřímky *AX* s kružnicí *k*

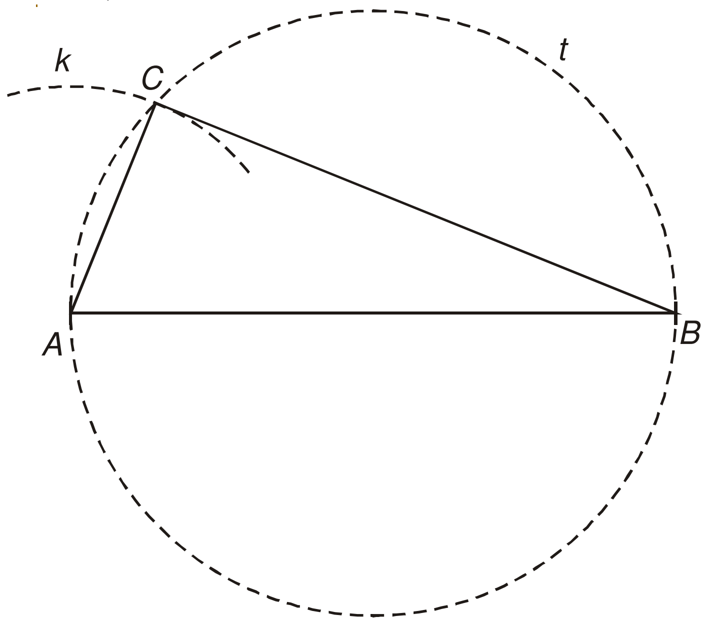
5. trojúhelník *KLM*

Př. 3: Je dána úsečka AB, $|AB| = 8\text{ cm}$. Najdi všechny body C tak, aby pro trojúhelník ABC platilo: $\gamma = 90°$, $b = |AC| = 3\text{cm}$.



Vycházíme z narýsované úsečky AB $\Rightarrow$ hledáme bod C, tak aby platilo:

- $b = |AC| = 3\text{cm}$ $\Rightarrow$ bod C leží na kružnici se středem v bodě A a poloměru 3 cm,
- $\gamma = 90°$ $\Rightarrow$ bod C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB.



1. úsečka AB, $|AB| = 8\text{ cm}$

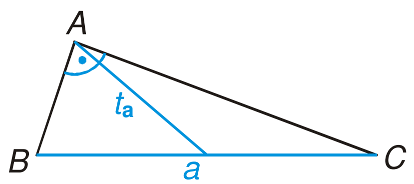
2. kružnice $k(A; 3\text{ cm})$

3. kružnice $t(S_{AB}; |S_{AB}A|)$

4. bod C, průsečík kružnic k a t

5. trojúhelník ABC

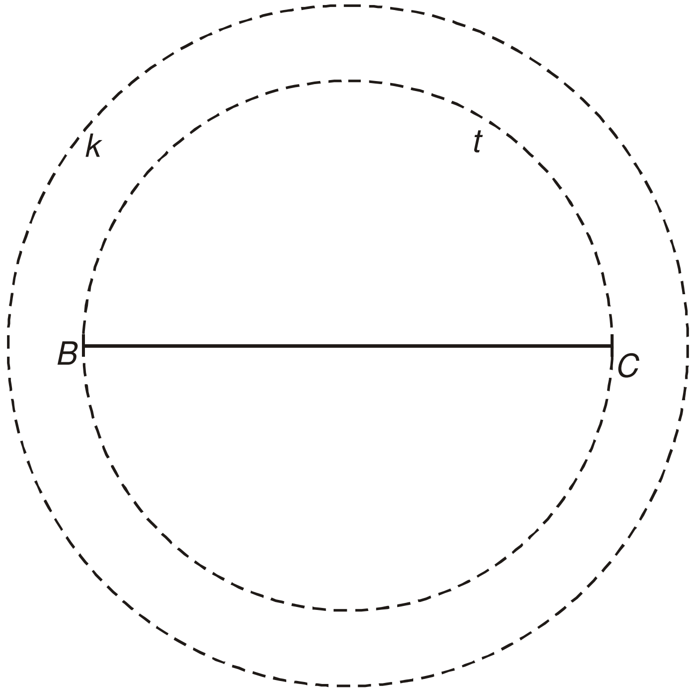
Př. 4: Je dána úsečka BC, $|BC| = 7\text{ cm}$. Najdi všechny body A tak, aby pro trojúhelník ABC platilo: $\alpha = 90°$, $t_a = 4{,}5\text{cm}$.



Velmi podobné jako předchozí příklady.

Vycházíme z narýsované úsečky BC $\Rightarrow$ hledáme bod A, tak aby platilo:

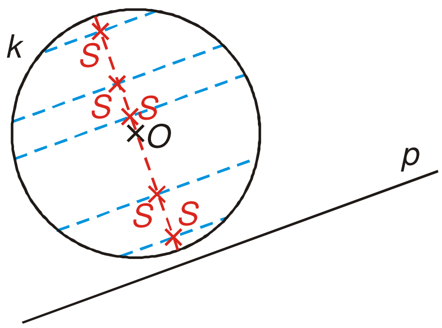
- $t_a = |S_{BC}A| = 4{,}5\,\text{cm} \Rightarrow$ bod A leží na kružnici se středem v bodě S_{BC} a poloměru 4,5 cm,
- $\alpha = 90° \Rightarrow$ bod A leží na Thaletově kružnici nad průměrem BC.



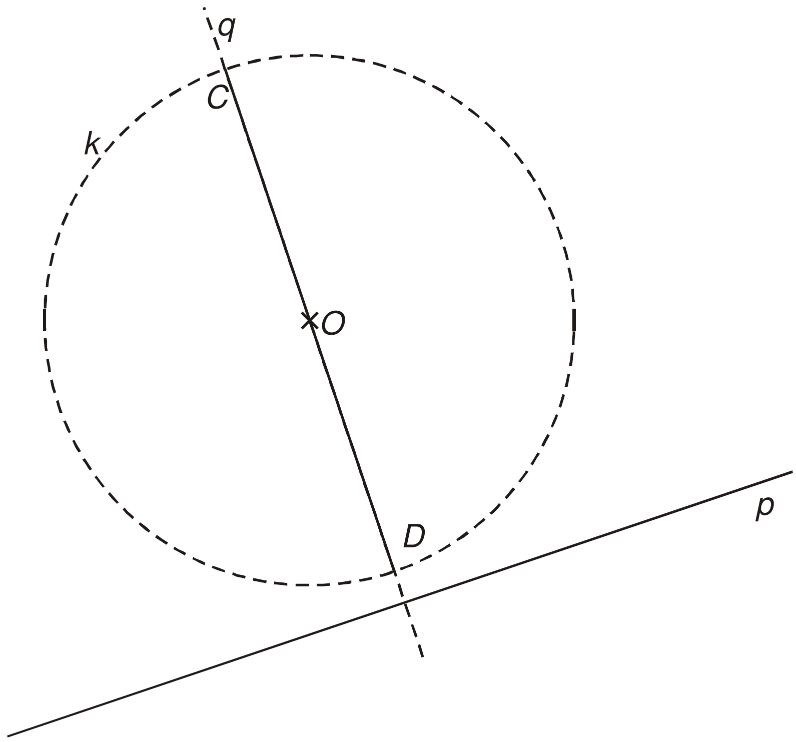
Narýsované kružnice se neprotínají (což je zřejmé z toho, že mají stejný střed, ale různé poloměry) $\Rightarrow$ zadání nemá řešení (není možné sestrojit trojúhelník, který by splňoval podmínky uvedené v zadání).

Př. 5: Je dána kružnice $k(O; 3{,}5\,\text{cm})$ a její vnější přímka p. Narýsuj množinu středů všech tětiv AB kružnice k, které jsou rovnoběžné s přímkou p.

Nakreslíme obrázek situace.



Z obrázku vidíme, že hledanou množinu středů tětiv tvoří tětiva CD, která je kolmá na přímku p a prochází středem kružnice.

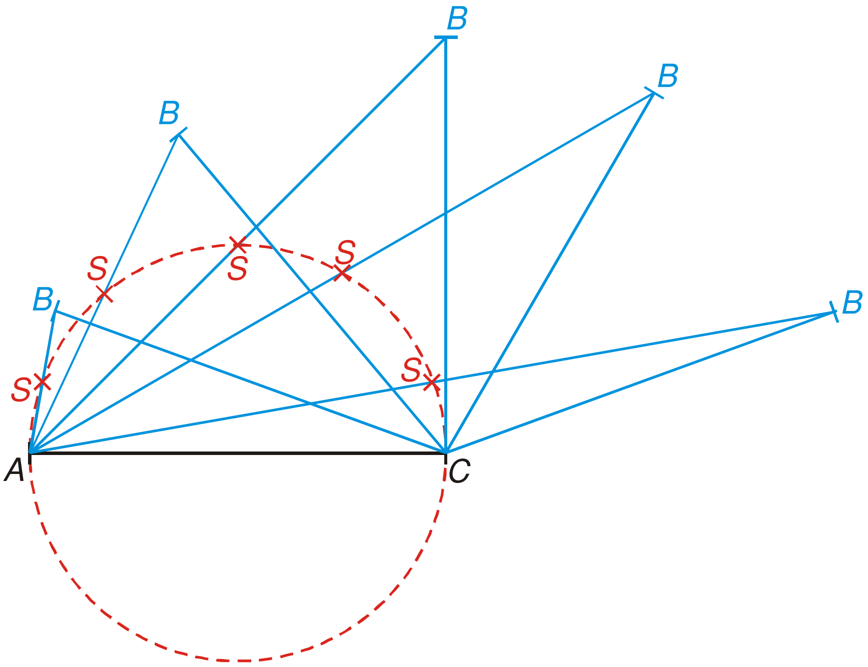


1. kružnice $k(O;3{,}5\,\mathrm{cm})$
2. přímka p, vnější přímka k
3. přímka q, $q \perp p$, $A \in q$
4. body C, D, průsečíky kružnice k a přímky q
5. úsečka CD

Pedagogická poznámka: Následující příklad dokáže vyřešit (správně sestavit důkaz) někdo jen opravdu výjimečně. Dostatečně těžkým úkolem pro nejlepší žáky (jiní se k němu v hodině nedostanou) je i pouhá interpretace zadání.

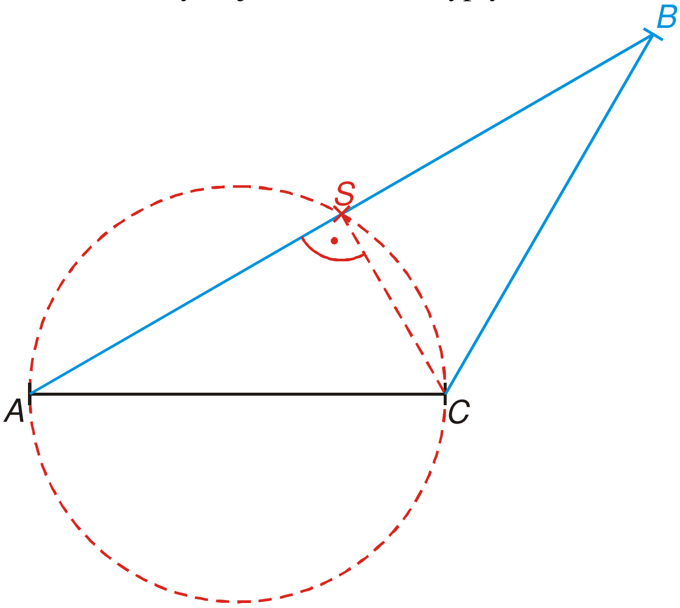
Př. 6: Je dána úsečka AC o délce 4 cm. Dokaž, že množinou středu S základen AB všech rovnoramenných trojúhelníků ABC je Thaletova kružnice nad průměrem AC bez krajních bodů AC.

Nakreslíme obrázek.



Zdá se, že hledané středy úseček AB opravdu tvoří Thaletovu kružnici (bez krajních bodů AC).

Nakreslím si do nového obrázku jednu ze zobrazených možností a hledáme, jak ze zadání (rovnoramenný trojúhelník ABC) vyplývá hledaná vlastnost (bod S je na Thaletově kružnici).



Trojúhelník ABC je rovnostranný se základnou $AB \Rightarrow$ úsečka SC (těžnice) je kolmá na stranu $AB \Rightarrow$ úhel ASC je pravý $\Rightarrow$ bod S leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC.
Dokázali jsme, že pokud bod S má vlastnost (je středem základny AB v rovnoramenném trojúhelníku ACB, leží na Thaletově kružnici.

Dokazujeme, že pokud leží na Thaletově kružnici, má danou vlastnosti (je středem základny rovnoramenného trojúhelníku).
Bod S leží na Thaletově kružnici $\Rightarrow$ úhel ASC je pravý $\Rightarrow$ trojúhelník ASC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu $S \Rightarrow$ je možné ho doplnit na obrazem trojúhelníku ASC v osové souměrnosti s osou CS na rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB.

Shrnutí: